Григорий Перельман и проблема Пуанкаре

18 марта 2010 года на сайте Математического института Клэя в США появилось следующее сообщение:

**First Clay Mathematics Institute Millennium Prize Announced Today**
**Prize for Resolution of the Poincaré Conjecture Awarded to Dr. Grigoriy Perelman**

**March 18, 2010**

The Clay Mathematics Institute (CMI) announces today that Dr. Grigoriy Perelman of St. Petersburg, Russia, is the recipient of the Millennium Prize for resolution of the Poincaré conjecture. The citation for the award reads:

*The Clay Mathematics Institute hereby awards the Millennium Prize for resolution of the Poincaré conjecture to Grigoriy Perelman.*

The Poincaré conjecture is one of the seven Millennium Prize Problems established by CMI in 2000. The Prizes were conceived to record some of the most difficult problems with which mathematicians were grappling at the turn of the second millennium; to elevate in the consciousness of the general public the fact that in mathematics, the frontier is still open and abounds in important unsolved problems; to emphasize the importance of working towards a solution of the deepest, most difficult problems; and to recognize achievement in mathematics of historical magnitude.

**Richard Hamilton (mathematician)**

Смысл этого сообщения в том, что Математический институт Клэя (Массачусетс, США) присудил петербургскому ученому-математику Григорию Перельману премию тысячелетия за доказательство гипотезы Пуанкаре. За получение премии предусматривается щедрая награда в 1000000 долларов. Институт награждает тех, кто сможет решить одну из семи так называемых "задач тысячелетия", список которых был учрежден в 2000 году. Подобным списком планировалось выделить самые трудные проблемы, с которыми сталкиваются математики.

Сначала дадим предысторию этого события. Все началось с исследований, которые Пуанкаре[1] вел в области алгебраической геометрии. Он работал над одним из краеугольных камней этой науки - теорией гомологий, особого класса топологических инвариантов. В 1900 году он опубликовал статью, в которой доказывал, что если у трехмерной поверхности гомология совпадает с гомологией сферы, то и сама поверхность - сфера; на самом деле это утверждение даже более сильное, чем утверждение гипотезы Пуанкаре.

Однако в его рассуждения вкралась ошибка, которую он сам и нашел, к 1904 году разработав важнейшее понятие фундаментальной группы и построив на его базе контрпример к собственной теореме. Тогда же он наконец-то поставил вопрос правильно (здесь приведена формулировка гипотезы Пуанкаре на современном математическом языке):

*Всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие гомеоморфно трёхмерной сфере.*

[1] Пуанкаре Жюль Анри (Poincaré Jules Henri) (29.04.1854, Нанси, - 17.07.1912, Париж) – французский математик и астроном, создатель геоцентрической системы мира. Труды в области математики, с одной стороны, завершают классическое направление, а с другой стороны – открывают пути к развитию новой математики, где наряду с количественными соотношениями устанавливаются факты, имеющие качественный характер. Он ввел основные понятия комбинаторной топологии и доказал формулу, получившую название Эйлера – Пуанкаре. В области философии он создал доктрину конвенционализма, которая утверждает свободу в выборе основных принципов любой теории, ограничивая этот выбор только условием их непротиворечивости. Философские взгляды Пуанкаре критиковал В.И. Ленин в работе «Материализм и эмпириокритицизм».

Иногда она формулируется чуть иначе:

*Всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере.*

Разница в этих формулировках состоит в том, что вторая содержит уточнение *без края*. Дело в том, что в применении к многообразиям используются две терминологические системы. Первая допускает, что многообразия могут как иметь край, так и не иметь его, поэтому в ней необходимо уточнение для конкретизации вида рассматриваемого многообразия: *многообразие с краем* или *многообразие без края*. Вторая система называет *многообразиями* только те объекты, которые в первой системе называются многообразиями без края. Таким образом, две внешне различные формулировки гипотезы Пуанкаре равносильны, дело только в терминологической неоднозначности.

Достаточно долго на гипотезу не обращали внимания. Интерес к ней пробудил Генри Уайтхед[2], который в 1930-е годы объявил о том, что нашел доказательство гипотезы. Почти сразу было обнаружено, что его доказательство оказалось неверным. Однако в процессе поиска и попыток исправить свои неточности он обнаружил интереснейшие классы трехмерных поверхностей и значительно продвинул теорию, которая позднее получила название топологии малых (или низших) размерностей. В 50-е и 60-е годы XX века всплеск интереса к проблеме вновь породил несколько ошибочных заявлений о том, что теорему удалось доказать, и после этого математики наконец-то поняли, что гипотезу Пуанкаре так просто не возьмешь: с шестидесятых годов и до работ Григория Перельмана ложные доказательства предъявляли только любители.

Топология низших размерностей стала отдельной ветвью математики по удивительной причине - в многомерном случае все гораздо проще! Уже в 50-е и 60-е годы утверждения, аналогичные гипотезе Пуанкаре, были доказаны для более высоких размерностей. Трехмерный же случай продолжал оставаться камнем преткновения. Кроме того, гипотеза Пуанкаре имеет достаточно общепризнанную космологическую интерпретацию. Можно предположить, что Вселенная обладает свойствами *односвязного компактного трёхмерного многообразия*. Гипотеза утверждает, что Вселенная в известном смысле неотличима от трехмерной сферы.

Для большего понимания этого утверждения, скажем, что обычная двумерная сфера – это поверхность обычного трехмерного шара. Трехмерная сфера недоступна для непосредственного восприятия обычными людьми, однако вполне возможно, что в ней мы живем.

Чтобы получить представление о смысле гипотезы Пуанкаре, разъясним термины, в которых она формулируется, без использования точных математических определений. Разъяснение требуется для пяти понятий: «односвязное», «компактное многообразие», «многообразие без края», «гомеоморфно», «трехмерная сфера».

Сначала заметим, что линии (прямые, окружности, параболы, гиперболы и т.д.) *одномерны*, поверхности (плоскости, сферы, параболоиды, гиперболоиды, торы[3] и т.д.) *двумерны*, точки *нольмерны*. Эта терминология напрямую связаны с возможностью задания точки на каждом из этих геометрических объектах. Положение точки, лежащей на линии, задается *одной «координатой»*, положение точки, лежащей на поверхности – *парой «координат»*. Нольмерность точки объясняется тем, что на ней может быть «расположена» точка единственным способом, т.е. не нужно никаких «координат».

[2] Уайтхед Джон Генри Константин (Whitehead John Henry Constantine) (11.11.1904, Мадрас, – 08.05.1960, Нью Джерси) - английский математик, один из основателей теории гомотопий. Не следует его путать с его собственным дядей Альфредом Уайтхедом, тоже математиком, но специализировавшимся на логике и алгебре, соавтором Бертрана Рассела по знаменитой книге Principia Mathematica. Имеет заслуги в области криптографии по расшифровке немецких шрифтов.

[3] Тор понимается здесь как поверхность, в этом случае тело, ограниченное этой поверхностью, называется *полноторием*.

Тела *трехмерны*, и положение точки тела определяется тремя координатами. Трехмерные тела ограничивают двумерные поверхности. В нашем мире нет четырехмерных геометрических тел, но если очень напрячь воображение, то можно представить четырехмерный куб, гранями которого являются обычные трехмерные кубы. Легче представить двумерный мир, расположенный на плоскости, в котором нет третьего измерения. В этом мире не существует прямой, проходящей через вершину прямого угла перпендикулярно сторонам угла. Точно также, в нашем трехмерном пространстве не существует плоскости, проходящей через точку $O$ пересечения координатных плоскостей прямоугольной системы координат перпендикулярно этим плоскостям.

Теперь можно объяснить смысл термина «трехмерная сфера» - это поверхность, ограничивающая четырехмерный шар – множество точек четырехмерного пространства, равноудаленных от данной фиксированной точки, называемой центром.

«Односвязность» геометрической фигуры означает, что любая замкнутая линия, все точки которой принадлежат этой фигуре, может быть *стянута в точку, не выходя за пределы рассматриваемой фигуры*. Например, круг односвязен, но если взять плоское кольцо, то оно уже не односвязно, т.к. линия, внутри которой лежит «дырка» кольца, не может быть стянута в точку (этому помешает дырка). Поверхность шара односвязна, а поверхность тора – не односвязна по той же причине, что и кольцо. Ясно, что трехмерная сфера является односвязной геометрической фигурой.

Следующее понятие, смысл которого необходимо разъяснить, это понятие *многообразия*. Точное определение многообразия следовало бы начать с понятия топологического пространства, т.к. многообразия – это класс топологических пространств с определенными дополнительными свойствами. Однако ограничимся рассмотрением многообразий, которые представляют собой геометрические фигуры. Отличительным свойством многообразия без края или просто многообразия является его локальная однородность. Другими словами, для всех точек многообразия, содержащиеся вместе с ними «окрестности», неотличимы друг от друга в определенном смысле. Например, все пространство, плоскость, прямая, окружность, внутренность круга – суть многообразия. Если присоединить к внутренности круга окружность, то у этого множества – круга – появляется «край» и при этом нарушается указанная однородность. Окрестность точки, принадлежащей окружности, ограничивающей круг, существенно отличается от окрестности точки, принадлежащей внутренности круга. Точки многообразия, принадлежащие «краю» будем называть *краевыми*, а принадлежащие внутренности – *внутренними*.

Многообразия могут иметь любую размерность. Из приведенного выше примера отметим, что прямая, интервал (т.е. отрезок без концов) и окружность – одномерные многообразия; плоскость, внутренность круга (или *открытый круг*), сфера – двумерные многообразия; пространство, внутренность шара, внутренность тора – трехмерные многообразия.

Теперь разберемся, что такое компактное многообразие. Будем называть *покрытием* многообразия любую совокупность его подмножеств, объединение которых дает данное многообразие. Многообразие называется компактным, если из любого его покрытия можно выбрать конечное покрытие.

Наглядно двумерные компактные многообразия с краем можно представить в виде лоскутного одеяла, сшитого из лоскутов, каждый из которых представляет собой произвольным образом деформированный круг с помощью растяжений и сжатий. Нельзя при этом разрывать и склеивать с самим собой каждый из полученных таким образом лоскутов. Если сшить из лоскутов поверхность шара или тора, то получим двумерное компактное многообразие без края (или просто многообразие). Круг является компактным многообразием с краем, но открытый круг хотя и является многообразием, но не является компактным многообразием.

Аналогично, одномерные компактные многообразия – это линии, которые можно склеить из конечного числа как угодно деформированных отрезков прямой (без разрывов и склеиваний). При этом подразумевается, что конец отрезка либо не склеивается ни с чем (и тогда мы получим многообразие с краем), либо склеивается с ровно одним концом ровно одного другого отрезка. Например, множество точек, образующих букву «М» образует компактное многообразие, а букву «Т» - не образует (Т не является даже многообразием в любом смысле!). Окружность, а также всякая линия, которая может быть получена из нее деформацией, являются одномерными компактными многообразиями. Интервал и полуинтервал не являются компактными многообразиями.

Чтобы дать интуитивное представление о трехмерных компактных многообразиях, нужно сначала указать те фигуры, из которых складывается любое трехмерное компактное многообразие. Для одномерного случая такими фигурами были деформированные отрезки, а для двумерного – деформированные круги. По аналогии, в трехмерном случае для определения компактного многообразия можно воспользоваться деформированными шарами, которые получаются из шара сжатием, растягиванием, всем тем, что делается с пластилиновым шаром руками ребенка. При этом, как и ранее, нельзя делать разрывы и склейки. Например, если шар раскатать в цилиндр, а затем склеить его основания, то получим тор, который не является компактным многообразием. Впрочем, он не является и просто многообразием. Трехмерное компактное многообразие – это такая геометрическая фигура, которая получается склеиванием конечного числа деформированных шаров.

Легко понять, что обычная спортивная гиря с ручкой является компактным многообразием. Ясно, что для ее склеивания достаточно иметь обычный шар (быть может, слегка деформированный для устойчивости) и еще один шар, раскатанный в цилиндр (это - ручка гири). Это склеивание можно произвести в трехмерном пространстве. Заметим, что трехмерная сфера является компактным многообразием, но для ее склеивания из деформированных шаров необходимо выйти в четырехмерное пространство. Чтобы понять этот факт, представим, как склеивается из лоскутов футбольный мяч, который является в нашей терминологии двумерной сферой.

Можно привести пример двумерного компактного многообразия, которое «не умещается» в трехмерном пространстве. Заметим, что двумерная сфера, как было сказано выше, «умещается» в трехмерном пространстве, а трехмерная – четырехмерном. Так вот, бутылка[4] Клейна[5] является двумерным компактным многообразием, но чтобы ее склеить из деформированных кругов надо выйти в четырехмерное пространство.

Теперь перейдем к понятию гомеоморфизма. В геометрии две фигуры считаются гомеоморфными, если, считая их сделанными из материала, позволяющего любые деформации, одну можно получить из другой деформированием без разрывов и склеиваний. Сами такие деформации называются *гомеоморфизмами*. Свойство гомеоморфии изучается в высшем разделе геометрии – топологии. Например, шар и куб являются гомеоморфными телами, а шар и тор – не являются. С другой стороны, тор и гиря с одной ручкой гомеоморфны, а тор и гиря с двумя ручками – нет. Вполне естественно распространить понятие гомеоморфизма и на фигуры любой размерности, начиная с 2. При этом, круг и квадрат оказываются гомеоморфными фигурами, а круг и сфера, которая также является двумерным многообразием, не являются гомеоморфными. Нельзя придумать гомеоморфизма, который преобразовал бы сферу в круг или в боковую поверхность цилиндра. В то же время, сфера и полная поверхность цилиндра гомеоморфны. Одна из замечательных теорем топологии утверждает, что всякое двумерное компактное многообразие, умещающееся в трехмерном пространстве, гомеоморфно сфере с некоторым количеством ручек.

---

[4] Бутылка Клейна – односторонняя поверхность, которая в трехмерном пространстве может быть получена из конусообразной трубы, открытой с обеих сторон, если, изогнув трубу, пропустить более узкий ее конец через стенку и склеить обе граничные окружности, изгибая внешнюю широкую окружность внутрь, а внутреннюю узкую окружность наружу.

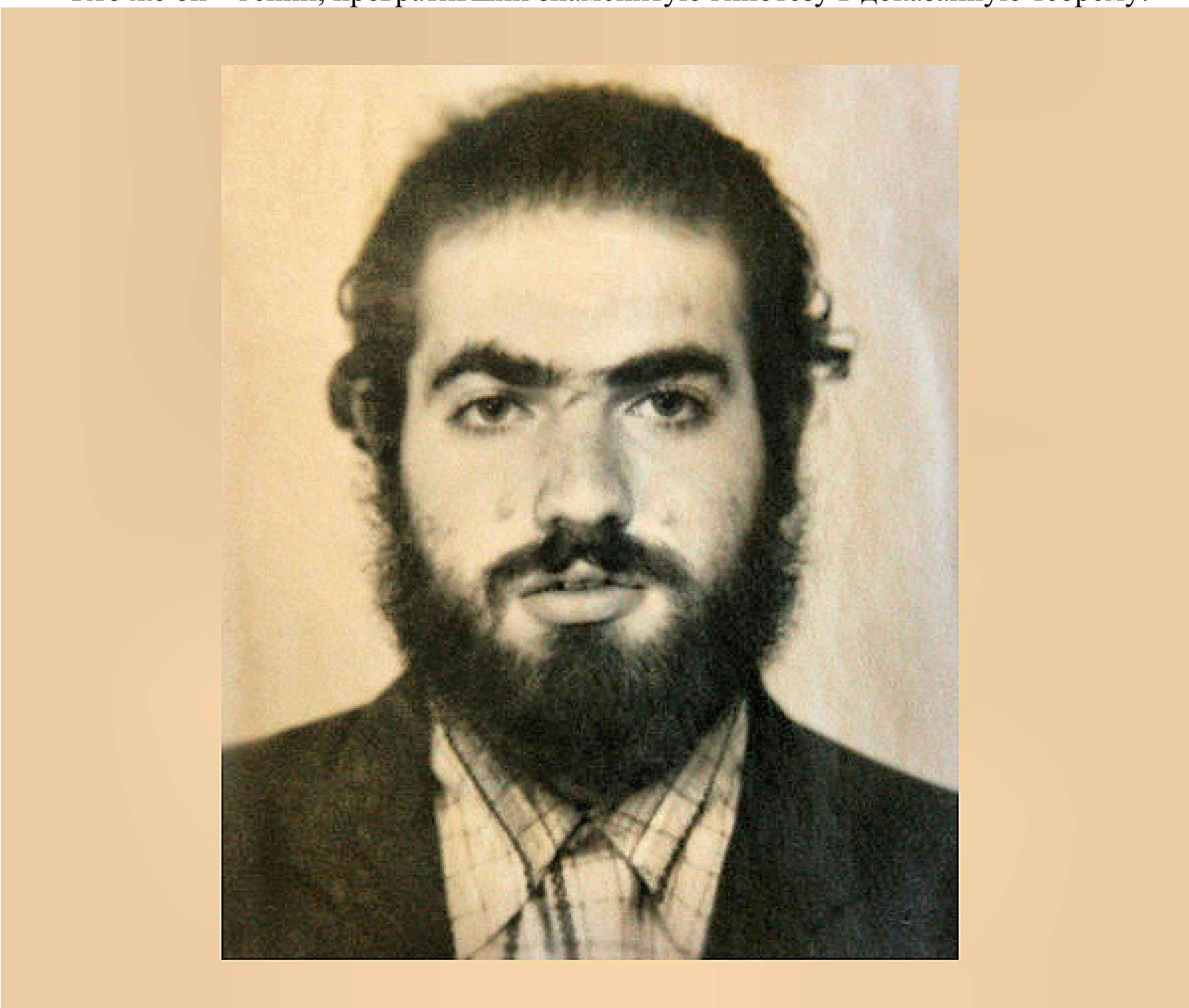
[5] Клейн Кристиан Феликс (Klein Christian Felix) [25.04.1849, Дюссельдорф, - 22.06.1925, Геттинген] - немецкий математик. Основные труды по неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраических уравнений. Создатель «Энциклопедии математических наук».

Итак, достаточно ясно, что двумерная и трехмерная сферы односвязны, компактны и не имеют края. Можно задать вопрос, достаточно ли этих свойств для однозначного их определения с точностью до гомеоморфии. Для двумерной сферы этот вопрос можно назвать «двумерной проблемой Пуанкаре»: *всякое ли двумерное односвязное компактное многообразие гомеоморфно двумерной сфере*? Положительный ответ на этот вопрос был известен давно, он был известен и самому Пуанкаре. Для трехмерной сферы вопрос превратился в знаменитую «трехмерную проблему Пуанкаре».

У гипотезы Пуанкаре имеются и *n*-мерные версии для всех $n > 3$. Они оказались «проще» чем трехмерная версия. В 1960-е годы была доказана *n*-мерная гипотеза для всех $n \geq 5$. Случай $n = 4$ в 1980-е годы доказал Майкл Фридман[6].

Итак, гипотеза Пуанкаре превратилась в *теорему Пуанкаре – Перельмана*, значение которой имеет огромное значение и для внутреннего развития математики, а также из-за ее применимости к космологии. Некоторые авторитетные ученые заявляют, что доказанная теорема позволяет объяснить процесс формирования черных дыр. С точки зрение математики главное достижение Перельмана состоит в найденном им способе ее доказательства.

Кто же он – гений, превративший знаменитую гипотезу в доказанную теорему.



Григорий Яковлевич Перельман родился 13 июня 1966 года в Ленинграде. Его отец был инженером-электриком, который в 1993 году эмигрировал в Израиль. Мать осталась в Санкт-Петербурге, работала учителем математики в ПТУ.

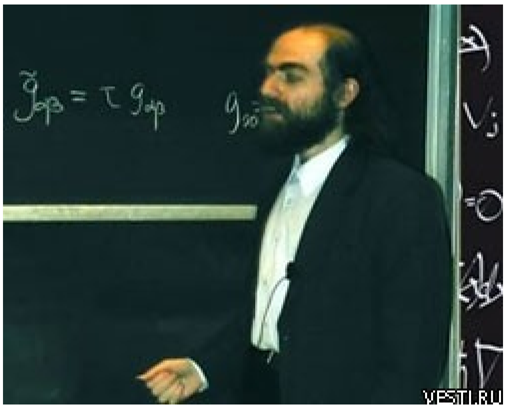
[6] Майкл Хартли Фридман (Michael H. Freedman) [21.04.1951, Лос Анжелос] – американский математик. В 1986 г. получил Филдсовскую медаль на Математическом конгрессе в Мадриде.

Георгий Перельман окончил ленинградскую физико-математическую школу №239 с углубленным изучением математики. В 1982 году в составе команды школьников участвовал в Международной математической олимпиаде в Будапеште. В том же году был зачислен на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета без экзаменов. Побеждал на факультетских, городских и всесоюзных студенческих математических олимпиадах. Все годы учебы в ЛГУ получал Ленинскую стипендию, окончил университет с отличием.

Георгий Перельман первый справа в первом ряду

Поступил в аспирантуру при Ленинградском (ныне Санкт-Петербургском) отделении Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (ныне РАН). Научным руководителем Перельмана был академик Александр Данилович Александров. Защитив кандидатскую диссертацию, Перельман продолжил работать в лаборатории математической физики ЛОМИ им.В.А. Стеклова (ныне ПОМИ). Перельман был известен работами по теории пространств Александрова, сумел доказать ряд гипотез.

В 1992 году Перельмана пригласили провести по семестру в Нью-йоркском университете и Университете Стони Брук (Stony Brook University), затем в 1993 году он продолжил преподавание и научную работу в Беркли. В 1996 году (по другим сведениям - в 1995 году) Перельман вернулся в ЛОМИ, где он начал изучать работы Ричарда Гамильтона[7] по потокам Риччи и проводить по ним семинары.




[7] Ричард Гамильтон (Richard Streit Hamilton) [1943, Цинциннати] – американский математик, профессор Колумбийского университета.

В ноябре 2002 – июле 2003 годов Перельман разместил на сайте arXiv.org три научные статьи:

• The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications

• Ricci flow with surgery on three-manifolds

• Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds

Эти статьи в предельно сжатом виде содержали решение одного из частных случаев гипотезы геометризации Уильяма Терстона[8], приводящее к доказательству гипотезы Пуанкаре.

Описанный ученым метод изучения потока Риччи получил название теории Гамильтона—Перельмана. Эти работы Перельмана не получили статуса официальной научной публикации, так как arXiv.org является библиотекой препринтов, а не рецензируемым журналом. Попыток официальной публикации этих работ Перельман не предпринимал.

В 2003 году Перельман прочитал в США серию лекций, посвященных своим работам, после чего вернулся в Санкт-Петербург и поселился в квартире своей матери в Купчино. В декабре 2005 года он ушел с поста ведущего научного сотрудника лаборатории математической физики, уволился из Математического института и практически полностью прервал контакты с коллегами.

Григорий Перельман на прогулке. Один из немногих снимков, сделанных после того, как он перестал заниматься научной работой.

Вот, что рассказал директор Санкт-Петербургского отделения Математического института РАН, члена-корреспондента РАН Сергея Витальевича Кислякова:

«Детали ухода Григория Яковлевича Перельмана из ПОМИ РАН освещались в СМИ не раз, так что утверждения вроде: «Лицемерные коллеги изгнали Перельмана из института» — или иные утверждения той же окраски или со схожим подтекстом — теперь можно квалифицировать только как беззастенчивую и преднамеренную ложь, а отнюдь не добросовестное заблуждение.

Повторю основные факты. Г.Я.Перельман неожиданно для всех подал заявление об увольнении по собственному желанию в конце 2005 г. Академики РАН И.А.Ибрагимов (тогдашний директор ПОМИ) и

[8] Уильям Терстон (William Thurston) [30.10.1946, Вашингтон] – американский математик. В 1982 г. получил Филдсовскую медаль.

Л.Д.Фаддеев (академик-секретарь Отделения математических наук РАН) пытались уговорить его изменить свое решение, но безуспешно. При этом Григорий Яковлевич заявил о намерении не только покинуть институт, но и вообще оставить теоретическую математику (насколько я могу судить, это тоже было им исполнено).

Не стоит и говорить, что, конечно, руководство института обещало Григорию Яковлевичу снова принять его на работу, если он решит когда-нибудь возобновить свои математические занятия и захочет это делать в ПОМИ. Я стал директором ПОМИ примерно тогда, когда Г.Я. увольнялся окончательно, и это обещание подтвердил. Разумеется, оно в силе и сейчас.

Стоит упомянуть еще несколько клише, до сих пор упорно повторяющихся и тоже не соответствующих действительности, а именно: *«Перельману не давали защитить докторскую диссертацию»; «он не прошел очередную аттестацию»; «он не писал отчетов»* и т.п. В действительности по результатам последней аттестации (весной 2004 г.), проведенной до ухода Г.Я. из ПОМИ, он был повышен в должности до ведущего научного сотрудника. Собственно, из этого факта легко сделать заключение и о роли и месте отчетов во всей истории.

Докторскую же диссертацию Григорий Яковлевич писать и, тем более, защищать полагал излишним — примерно по таким же причинам, по которым он ограничивался тем, что выкладывал свои статьи в сети и не считал стоящей труда их публикацию в журналах.

Последнее обстоятельство заслуживает комментария, не относящегося к основной теме. Разумеется, такое поведение крайне необычно. Стоит, однако, отметить, что оно — редкий пример абсолютного примата Сути над видимостью. В бюрократических системах действует противоположный принцип, сформулированный, кажется, Паркинсоном (известным памфлетистом): грамм видимости дороже килограмма сути.

Печально наблюдать за тем, как в последние годы бюрократы упорно стремятся ввести этот принцип в оценку эффективности фундаментальных исследований, ставя во главу угла всевозможную видимость вроде импакт-фактора, индекса цитирования, числа публикаций, числа страниц в монографиях, числа патентов и т.п.

Беда в том, что, хотя нормальному человеку заниматься таким делом глубоко противно, технически эта видимость легко обеспечивается — в общем так и происходит в тех странах, где упомянутые формальные показатели уже актуальны. Последствия легко просчитать: при полном торжестве этой системы в её бюрократическом идеале решить еще одну «проблему тысячелетия» (неважно, в математике или нет) в России уже вряд ли получится.»

После появления работ Перельмана несколько групп математиков приступили к проверке правильности его доказательств. За четыре года проверки и детализации выкладок Перельмана ведущие эксперты в этой области ошибок не обнаружили. 22 августа 2006 года Перельману была присуждена Филдсовская премия "за вклад в геометрию и революционные достижения в понимании аналитической и геометрической структуры потока Риччи".

Филдсовская медаль

Оборотная сторона

**Филдсовская премия** (англ. *Fields Medal*) — международная премия **и медаль**, которые вручаются один раз в 4 года на каждом международном математическом конгрессе двум, трём или четырём молодым математикам не старше 40 лет (или достигших 40-летия в год вручения премии). Приз и медаль названы в честь Джона Филдса, который будучи президентом VII международного математического конгресса, проходившего в 1924 году в Торонто, предложил на каждом следующем конгрессе награждать двух математиков золотой медалью в знак признания их выдающихся заслуг.

**Филдсовская медаль** изготовляется из 14-каратного золота. На лицевой стороне — надпись на латыни: «*Transire suum pectus mundoque potiri*» («Превзойти свою человеческую ограниченность и покорить Вселенную») и изображение Архимеда. А на обороте: «Congregati *ex toto orbe mathematici ob scripta insignia tribuere*» («Математики, собравшиеся со всего света, чествуют замечательный вклад в познания»). Сумма денежной премии относительно невелика — 15 000 канадских долларов.

Перельман отказался принять филдсовскую премию и не приехал на Математический конгресс в Мадриде, где должно состояться вручение филдсовской медали. С тех пор он прекратил всякое общение с журналистами, объявив, что распрощался с научным сообществом и более не считает себя профессиональным математиком.

В опубликованном в октябре 2007 года газетой The Sunday Telegraph списке 100 ныне живущих гениев Перельман поделил с бразильским архитектором Оскаром Нимейером (Oscar Niemeyer) и американским композитором-минималистом Филиппом Глассом (Philip Glass) девятое место.

Солон Борис Яковлевич solon@isuct.ru