

ОСОБАЯ ТОЧКА ПОЛЯ СКОРОСТИ ИНДУКЦИОННО СВЯЗАННОЙ ПЛАЗМЫ

А. В. Герасимов, О. В. Зеленко, А. П. Кирпичников

*Казанский государственный технологический университет,
420015, г. Казань, ул. К. Маркса, 68, app_olga@rambler.ru, gerasimov@kstu.ru*

Индукционно связанная плазма (ИСП) широко применяется для проведения в ней различных химических реакций, а также в эмиссионном спектральном анализе. В качестве генератора индуктивно связанной плазмы используется высокочастотный индукционный (ВЧИ) разряд, получаемый в ВЧИ-плазмотронах. Газодинамика разряда оказывает большое влияние, как на электромагнитные, так и на тепловые параметры плазмы, а также на тепловой режим внутри газоразрядной камеры плазмотрона.

В данной работе в рамках обычной теплофизики получен принципиальный результат, касающийся малоизученного вопроса о газодинамической структуре высокочастотного индукционного разряда при атмосферном давлении.

Запишем уравнение, выражающее баланс энергии ИСП вблизи оси плазменного сгустка:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q_r(0,0) \cos^2(bz) + \rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (1)$$

Здесь T - температура; λ - коэффициент теплопроводности; ρ - плотность; c_p - удельная теплоемкость; Q_r - плотность энергии излучения; v_r и v_z - соответственно радиальная и продольная составляющие поля скоростей в разряде; $b = \frac{1}{L} \arccos \left(\frac{H_z(0,L)}{H_z(0,0)} \right)$,

где H_z - продольная составляющая напряженности магнитного поля в нагруженном плазмой индукторе; L - длина плазмоида. Уравнение (1) справедливо для любых $z \leq L$ и для всех значений r вплоть до расстояний порядка одной трети радиуса плазменного сгустка. Член $Q_r(0,0) \cos^2(bz)$, учитывающий потери на излучение, записан здесь в том же виде, что и в работе [1].

На оси разряда всегда выполнены условия $v_r = \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ и, поскольку $\lambda = \lambda(T)$, то и

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

В этом случае уравнение (1) на оси разряда при $r=0$ переходит в равенство

$$\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - Q_r(0,0) \cos^2(bz) = \rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Раскрывая неопределенность типа $\frac{0}{0}$ в первом слагаемом этого выражения по правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}}{\frac{\partial}{\partial r}} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2},$$

так что на оси при $r=0$

$$\lambda \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - Q_r(0,0) \cos^2(bz) = \rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z},$$

откуда

$$v_z(0, z) = \frac{\lambda \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - Q_r(0,0) \cos^2(bz)}{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial z}}$$

или, поскольку $\frac{\partial \lambda(T)}{\partial z} = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}$,

$$v_z(0, z) = \frac{\lambda \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - Q_r(0,0) \cos^2(bz)}{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial z}}. \quad (2)$$

Как видно из последнего выражения, зная распределение температур, а также значения плотности, удельной теплоемкости и коэффициента теплопроводности, можно найти продольную составляющую поля скорости $v_z(0, z)$ вдоль оси разряда.

Рассмотрим теперь ту точку z_0 на оси плазмоида, в которой значение осевой температуры $T(0, z)$ максимально: $z_0 = z[T_{\max}(0, z)]$, и исследуем поведение вблизи нее всех составных частей формулы (2).

Ясно, во-первых, что знаменатель этого выражения в точке z_0 обращается в нуль, и при этом производная $\frac{\partial T}{\partial z}$ в этой точке меняет знак:

$$\frac{\partial T}{\partial z} > 0 \text{ при } z < z_0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} < 0 \text{ при } z > z_0,$$

так что знаменатель стремится к нулю справа и слева от z_0 с разными знаками.

Далее, раз в точке z_0 обращается в нуль знаменатель выражения (2), то для того, чтобы скорость $v_z(0, z)$, как физическая величина, была всюду непрерывной, его числитель также, очевидно, должен обращаться в нуль в этой точке. При этом в силу правила Лопиталья

$$v_z(0, 0) = \frac{\lambda \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - Q_r(0,0) \cos^2(bz)}{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial z}} \Bigg|_{z_0} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}}{\rho c_p} \Bigg|_{z_0} =$$

$$= \frac{\lambda \left(2 \frac{\partial^3 T}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial^3 T}{\partial z^3} \right) + b Q_r(0,0) \sin(2bz)}{\rho c_p \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} \Bigg|_{z_0} =$$

конечная величина, поскольку $\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z_0} = 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости к нулю числителя формулы (2) в окрестности точки z_0 .

Вторая радиальная производная температуры $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ в центральной области плазмоида, как правило, положительна и не меняет свой знак при переходе через точку z_0 , вторая аксиальная производная $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ отрицательна и не меняет своего знака вдоль всей

оси. Знак третьего слагаемого в числителе определяется знаком производной $\frac{\partial \lambda}{\partial T}$, которая в исследуемом диапазоне температур ($T > 7000$ К) знакопостоянна (например, для воздушной плазмы [2], отрицательна) и, наконец, вклад четвертого слагаемого (ответственного за вынос энергии из центральной зоны плазмоида излучением) в общем балансе энергии всегда отрицателен. Как видим, ни одно из слагаемых числителя формулы (2) для $v_z(0, z)$ не меняет свой знак при переходе через точку, в которой осевая температура максимальна и в силу симметрии последней относительно z_0 (что всегда можно считать выполненным для центральной зоны плазмоида) числитель сохраняет свой знак всюду в окрестности этой точки, то есть стремится к нулю справа и слева от z_0 с одним и тем же знаком.

А это, в свою очередь, означает, что продольная скорость плазмообразующего газа на оси плазмоида $v_z(0, z)$ меняет свой знак в точке z_0 , то есть, обращается в нуль в этой точке: $v_z(0, z_0) = 0$.

Если же теперь учесть то очевидное обстоятельство, что радиальная $v_r(0, z)$ и азимутальная $v_\phi(0, z)$ скорости газа на оси разряда в любом случае должны быть равны нулю в силу соображений симметрии, то отсюда получаем основной результат настоящей работы, который можно сформулировать следующим образом.

Внутри каждого высокочастотного индукционного разряда существует, по крайней мере, одна точка, в которой все три компоненты скорости плазмообразующего газа обращаются в нуль, и эта точка соответствует той точке на оси плазмоида, в которой значение его осевой температуры максимально.

Полученный результат можно назвать теоремой о неподвижной точке высокочастотного индукционного разряда. Заметим, что впервые, по-видимому, этот результат был получен путем численного решения уравнения баланса энергии ВЧИ-плазмы в работе [3], но тогда - в силу специфики численной постановки задачи - не был правильно понят и теоретически объяснен.

Для расчета распределения скорости вдоль оси разряда используется поле температур найденное из решения системы уравнений Максвелла [4-6] с использованием известной зависимости $\sigma(T)$ [7]. Значения плотности, удельной теплопроводности и теплоемкости плазмы являются функцией температуры и брались из работы [2]. Уравнение энергии аппроксимировалось методом конечных разностей:

$$-2\lambda_{0,j} \left(2 \frac{T_{1,j} - T_{0,j}}{\Delta r^2} \right) - \frac{\lambda_{0,j+1} - \lambda_{0,j-1}}{2\Delta z} \cdot \frac{T_{0,j+1} - T_{0,j-1}}{2\Delta z} - \lambda_{0,j} \frac{T_{0,j+1} - 2T_{0,j} + T_{0,j-1}}{\Delta z^2} + \\ + Q_{r(0,0)} \cos^2(bz_j) + \rho_{0,j} c_{p(0,j)} v_{z(0,j)} \frac{T_{0,j+1} - T_{0,j-1}}{2\Delta z} = 0$$

Первые производные, входящие в уравнение энергии аппроксимировались центральными разностями, а вторые производные разностью второго порядка.

Расчет продольной составляющей поля скоростей проводился в 141 сечении вдоль оси плазмоида в предположении его симметричности, которое вытекает из анализа уравнения энергии, записанного для оси разряда. Правильность полученных выводов наглядно иллюстрируют распределения температуры и продольной составляющей поля скорости вдоль оси разряда, представленные на рис.1.

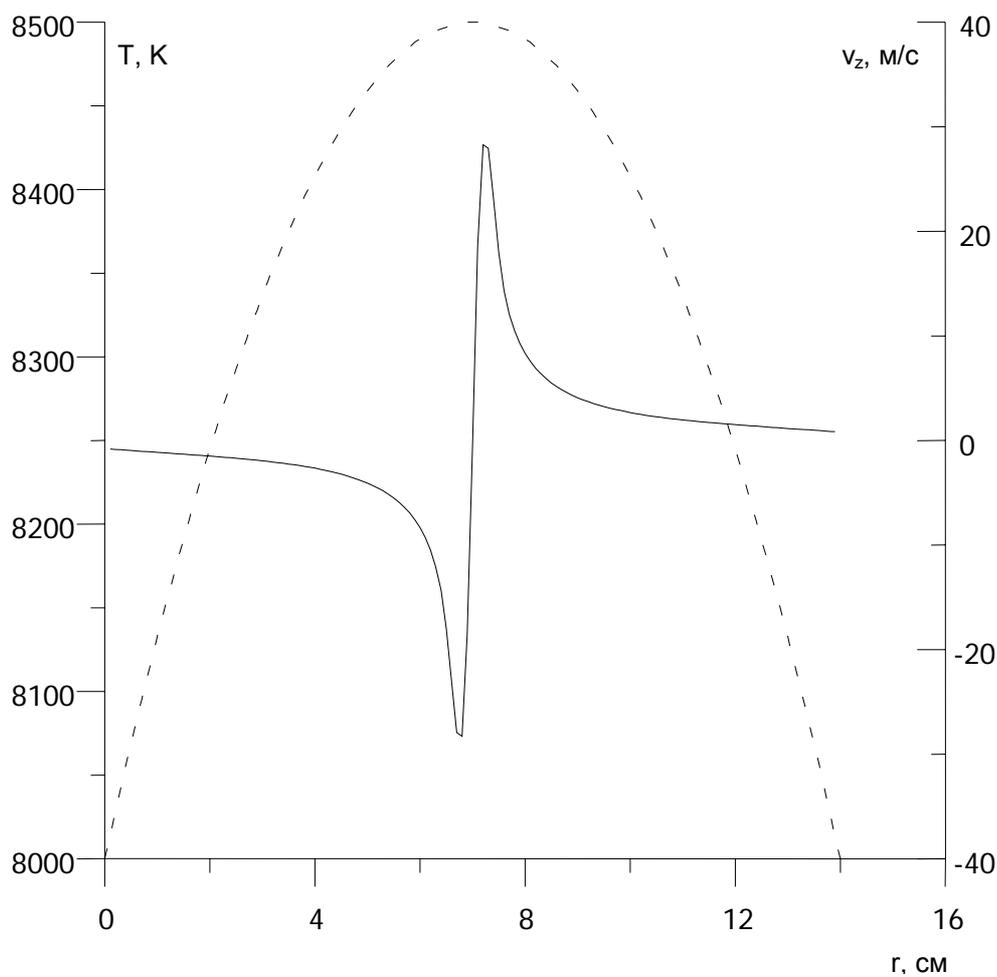


Рис. 1. Радиальное распределение температуры (---) и продольной составляющей поля скорости (—) вдоль оси разряда

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов А.В., Кирпичников А.П. // *Теплофизика высоких температур*. 1998. Т. 36. № 2. С. 342.
2. *Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока* / Под ред. Предводителя А.С. М.-Л.: Госэнергоиздат. 1961.
3. Гойхман В.Х., Кузьмина В.С. // *Физическая электроника. Ч.2. Электроника низкотемпературной плазмы*. Л.: Изд-во ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1974. С.66.
4. Гайнуллин Р.Н., Герке А.Р., Кирпичников А.П. // *Известия ВУЗов. Физика*. 1992. № 6. С.121.
5. Гайнуллин Р.Н., Герке А.Р., Кирпичников А.П. // *Инженерно-физический журнал*. 1995. Т. 6. № 2. С. 248.
6. Кирпичников А.П., Герасимов А.В. // *Плазмотехнология-95* / Под ред. Юхимчука С.А. Запорожье: Изд-во ЗГТУ, 1995. С. 28.
7. Кринберг И.А. // *Журнал прикладной механики и технической физики*. 1965. № 1. С. 76.